

Nom :  
Prénom :

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER	L3 PHYSIQUE FONDAMENTALE
--------------------------	--------------------------

ANNÉE UNIVERSITAIRE 2008–2009

## MÉCANIQUE QUANTIQUE

**Interrogation n° 1** (*durée 45 mn*)

### Questions de cours

1. Écrire sans démonstration le hamiltonien  $H$  d'un oscillateur harmonique à une dimension de pulsation  $\omega$  et de masse  $m$ . Préciser la(les) relation(s) de commutation entre les opérateurs qui interviennent dans ce hamiltonien.

2. Donner (toujours sans démonstration) l'expression des unités naturelles de longueur et d'impulsion pour cet oscillateur. Écrire le hamiltonien dans ces unités.

3. Rappeler l'expression des opérateurs  $a$  et  $a^\dagger$ , ainsi que leur relation de commutation (on demande la démonstration). En déduire l'expression de  $H$  en fonction de ces opérateurs.

4. On considère un état propre  $|n\rangle$  de l'opérateur  $a^\dagger a$  de valeur propre  $n$  supposé normé. Montrer que  $a^\dagger |n\rangle$  est un état propre de valeur propre  $n + 1$  de  $a^\dagger a$  et calculer la norme de  $a^\dagger |n\rangle$ .

## Exercice : Niveaux de Landau

On rappelle l'expression du hamiltonien d'une particule se déplaçant dans un plan à 2 dimension en présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$  perpendiculaire à ce plan :

$$H = \frac{1}{2m} [(P_x - qA_x)^2 + (P_y - qA_y)^2]$$

où  $A_x$  et  $A_y$  sont les deux composantes du potentiel-vecteur, qui dépendent de  $X$  et  $Y$ . L'expression détaillée de ces composantes n'est pas utile, mais elles sont liées au champ magnétique par :

$$\frac{\partial A_y}{\partial X} - \frac{\partial A_x}{\partial Y} = B$$

1. On pose  $\Pi_x = (P_x - qA_x)$  et  $\Pi_y = (P_y - qA_y)$ . Calculer le commutateur de  $\Pi_x$  et  $\Pi_y$ .

2. On pose :

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}} (\Pi_x + i\Pi_y)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar q B}} (\Pi_x - i\Pi_y)$$

Quel est la commutateur de  $a$  et  $a^\dagger$  ?

3. Exprimer  $H$  en fonction de  $a$  et  $a^\dagger$  et en déduire que c'est un hamiltonien d'oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_c$ , dont on donnera l'expression.

4. Donner les niveaux d'énergie de ce hamiltonien (on ne demande que l'expression, pas le calcul).

5. On pose  $X_0 = X - \Pi_y/qB$  et  $Y_0 = Y + \Pi_x/qB$  (on pourrait se convaincre que  $x_0$  et  $y_0$  sont les coordonnées du centre du cercle décrit par la particule en mécanique classique, mais ce n'est pas demandé ici). Calculer les commutateurs :

$$[\Pi_x, X_0] =$$

$$[\Pi_x, Y_0] =$$

$$[\Pi_y, X_0] =$$

$$[\Pi_y, Y_0] =$$

$$[X_0, Y_0] =$$

6. En déduire que la distance  $R_0$  entre l'origine et le centre du cercle est quantifiée, et que les niveaux d'énergie de  $H$  sont infiniment dégénérés.